

Tentamen Partiële Differentiaalvergelijkingen

19 augustus 2008, 9.00-12.00 uur.

Dit is een gesloten boek tentamen. Het bestaat uit vijf opgaven, die evenzwaar wegen. Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd. Succes!

1. Beschouw de quasi-lineaire, eerste-orde p.d.v.

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u) \quad (1)$$

- (a) Neem $a(x, y, u) = x$, $b(x, y, u) = x + y$, $c(x, y, u) = u + 1$ en bepaal de oplossing $u(x, y)$ van (1) die voldoet aan de beginvoorwaarde $u(x, 0) = x^2$.
- (b) Schets het bewijs van de bij onderdeel (a) gevolgde oplosmethode.

2. Bereken de oplossing $u(x, t)$ van

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad x \in (-1, 1) \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 1 \quad x \in (-1, 1)$$

$$u(-1, t) = u(1, t) = 0 \quad t > 0$$

3. De Sturm-Liouville differentiaaloperator L wordt gegeven door

$$Ly = -(p(x)y')' + q(x)y$$

waarbij $0 < x < 1$, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$. Laat deze operator werken op functies $y(x)$ die voldoen aan de randvoorwaarden $y(0) - \alpha y'(0) = 0$ en $y(1) + \beta y'(1) = 0$, waarbij de constanten α en β groter dan nul zijn.

- (a) Bewijs dat (onder deze randvoorwaarde) de operator L positief is, d.w.z.

$$\int_0^1 uLudx > 0 \quad \text{als} \quad u \neq 0.$$

- (b) Bewijs dat L zelf-geadjungeerd is, d.w.z.

$$\int_0^1 uLvdx = \int_0^1 vLudx$$

(voor alle u en v die aan de gegeven randvoorwaarden voldoen).

Z.O.

4. (a) Voor $T > 0$ beschouwen we $Q_T = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$. Neem aan dat $u(x, t)$ voor $(x, t) \in Q_T$ voldoet aan de ongelijkheid

$$u_t - a(x, t)u_{xx} - b(x, t)u_x < 0$$

waarbij $a(x, t) \geq 0$ in Q_T . Toon aan dat $u(x, t)$ geen lokaal maximum kan aannemen in Q_T .

- (b) Waarom bestaat er geen maximum principe voor de golfvergelijking $u_{tt} = c^2 u_{xx}$?

5. (a) Bewijs dat de waarde van een harmonische functie in een punt $P \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ gelijk is aan het gemiddelde van de functiewaarden over een willekeurige cirkel met middelpunt P (zolang deze binnen Ω blijft)
- (b) Idem, met cirkel vervangen door cirkelschijf.